Übungen aus Mathematik II für Ingenieurwissenschaften

Sommersemester 2012, 9. Blatt

65. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden. Falls ja, geben Sie eine Basis und die Dimension an.

    - Die Menge aller Punkte (x, y) des $\mathbb{R}^2$ mit $x \geq 0$.
    - Die Menge aller Punkte (x, y) des $\mathbb{R}^2$ mit $\alpha x + \beta y = 0$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
    - Die Menge aller Punkte (x, y) des $\mathbb{R}^2$ mit $\alpha x + \beta y = 1$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

66. (a) Bestimmen Sie die Potenzen A^2, A^3, A^4 und allgemein A^n, mit $n \in \mathbb{N}$, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    (b) Wir können A als Abbildung $v \mapsto A \cdot v$ ansehen, welche einen Punkt v auf $A \cdot v$ abbildet. Interpretieren Sie A und die n-fache Anwendung A^n von A geometrisch, d.h., untersuchen Sie, wohin ein Punkt (x, y) abgebildet wird.

67. Bestimmen Sie Bild und Kern der Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

    (Diese Matrix stellt eine Orthogonalprojektion auf die Gerade, welche durch $(1, 1)$ aufgespannt wird, dar.)

68. Sind die drei Vektoren $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 3, 4)$ linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums, der durch diese drei Vektoren aufgespannt wird. Welche Dimension hat dieser?

69. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

    (b) Ebenso für:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

70. Bestimmen Sie Rang, Bild, Kern und Defekt der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

71. Ebenso für

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

72. Lösen Sie die untenstehenden Gleichungssysteme in x_1 und x_2, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$