UE Lineare Algebra II und Geometrie
Ergänzungen zum Beispiel 5 des 2. Aufgabenblattes

Stefan Huber (shuber@cosy.sbg.ac.at)

16. März 2012

In der Gruppe 3 haben Überlegungen zur Lösung des Beispiels 5 des 2. Aufgabenblattes zur unten stehenden Aussage geführt.

Lemma 1. *Seien V, W, U endlichdimensionale Vektorräume über K und $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W), \psi \in \operatorname{Hom}(W, U)$, dann gilt*

$$\dim\ker(\psi \circ \varphi) = \dim\ker\varphi + \dim\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi}.$$

Zunächst wollen wir eine Intuition für die Aussage gewinnen. Sei $v \in \ker(\psi \circ \varphi)$. Wir können zwei Fälle unterscheiden: Entweder ist $v \in \ker\varphi$ oder es ist $\varphi(v) \neq 0$, jedoch $\varphi(v) \in \ker\,\psi|_{\operatorname{Im}\varphi}$. Diese Fallunterscheidung spiegelt die Summe der Behauptung wider und diene uns als Intuition für den folgenden Beweis.

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von $\ker(\psi \circ \varphi)$. Da $\ker\varphi \subseteq \ker(\psi \circ \varphi)$, muss $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von $\ker\varphi$ enthalten. Es sei $\{v_1, \dots, v_l\}$ eine Basis von $\ker\varphi$, wobei $l = \dim\ker\varphi$, mit $0 \leq l \leq k$. (Es ist $l = 0$ falls $\ker\varphi = \{0\}$, also $\dim\ker\varphi = 0$.) Wir zeigen nun, dass $\{\varphi(v_{l+1}), \dots, \varphi(v_k)\}$ eine Basis von $\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi}$ ist.

Zunächst überlegen wir, dass $\{\varphi(v_{l+1}), \dots, \varphi(v_k)\}$ linear unabhängig ist. Sei $\sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i \varphi(v_i) = 0$. Zu zeigen ist, dass $\lambda_i = 0$ für $l + 1 \leq i \leq k$. Es folgt, dass $\varphi(\sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i v_i) = 0$ und demnach $\sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i v_i \in \ker\varphi$. Da $\{v_1, \dots, v_l\}$ eine Basis von $\ker\varphi$ ist, lassen sich $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ finden, sodass

$$\sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i \tag{1}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_k$ und $\sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i = 0$ folgt nun, dass $\lambda_i = 0$ für $1 \leq i \leq k$ und damit insbesondere $\lambda_{l+1} = \cdots = \lambda_k = 0$, was zu zeigen war.

Als nächstes zeigen wir, dass die lineare Hülle $\langle\{\varphi(v_{l+1}), \dots, \varphi(v_k)\}\rangle$ den Raum $\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi}$ aufspannt. Sei also $u \in \ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi}$ und damit insbesondere $u \in \operatorname{Im}\varphi$. Dann gibt es ein $u' \in V$ mit $\varphi(u') = u$. Da $u' \in \ker(\psi \circ \varphi)$ gilt, lassen sich $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ finden mit $u' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. Es folgt, dass

$$u = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i \varphi(v_i), \tag{2}$$

da $\varphi(v_i) = 0$ für $1 \leq i \leq l$. Es lässt sich also jedes $u \in \ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi}$ als Linearkombination von $\varphi(v_{l+1}), \dots, \varphi(v_k)$ anschreiben.

Da $\{\varphi(v_{l+1}), \dots, \varphi(v_k)\}$ eine Basis von $\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi}$ und $\{v_1, \dots, v_l\}$ eine Basis von $\ker\varphi$ ist, fassen wir zusammen:

$$\dim\ker\varphi + \dim\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi} = l + (k - l) = k = \dim\ker(\psi \circ \varphi).$$

□

Korollar 2. Seien V, W, U endlichdimensionale Vektorräume über K und $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W), \psi \in \operatorname{Hom}(W, U)$, dann gilt

$$\dim\ker(\psi \circ \varphi) \leq \dim\ker\varphi + \dim\ker\psi.$$

Beweis. Da $\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi} = \operatorname{Im}\varphi \cap \ker\psi \subseteq \ker\psi$ folgt, dass $\dim\ker\,\psi\,|_{\operatorname{Im}\varphi} \leq \dim\ker\psi$. □

Aufgabe 5 Seien V, W, U Vektorräume über K der Dimension $\dim V = n, \dim W = m, \dim U = l$, mit $n, m, l \in \mathbb{N}$. Weiters seien $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W), \psi \in \operatorname{Hom}(W, U)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi - m \leq \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \min\{\operatorname{rg}\varphi, \operatorname{rg}\psi\}$.

Um die linke Ungleichung zu zeigen, betrachten wir die Dimensionsformeln für φ, ψ und $\psi \circ \varphi$:

$$\operatorname{rg}\varphi + \dim\ker\varphi = n \tag{3}$$
$$\operatorname{rg}\psi + \dim\ker\psi = m \tag{4}$$
$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) + \dim\ker(\psi \circ \varphi) = n \tag{5}$$

Durch Einsetzen der dritten Gleichung in die Summe der ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi + \dim\ker\varphi + \dim\ker\psi = m + \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) + \dim\ker(\psi \circ \varphi).$$

Aus Korollar 2 folgt demnach:

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi - m = \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) + \underbrace{\dim\ker(\psi \circ \varphi) - (\dim\ker\varphi + \dim\ker\psi)}_{\leq 0} \leq \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi).$$

Für die rechte Ungleichung sind zwei Aussagen zu beweisen:

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \operatorname{rg}\varphi \qquad \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \operatorname{rg}\psi.$$

Durch Einsetzen von (3) in (5) und aus Lemma 1 ergibt sich die erste Aussage:

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{rg}\varphi + \underbrace{\dim\ker\varphi - \dim\ker(\psi \circ \varphi)}_{\leq 0} \leq \operatorname{rg}\varphi.$$

Die zweite Aussage lässt sich wie folgt zeigen. Ist $u \in \operatorname{Im}\psi \circ \varphi$, so gibt es ein $u' \in V$ mit $\psi(\varphi(u'))) = u$. Demnach ist $u \in \operatorname{Im}\psi$ und daher $\operatorname{Im}\psi \circ \varphi \subseteq \operatorname{Im}\psi$. Es folgt

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \operatorname{rg}\psi.$$