UE Mathematik I — Beispiel 30

Stefan Huber <shuber@cosy.sbg.ac.at>

21. November 2011

Aufgabenstellung Für welche Startwerte a_1 konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}? \tag{1}$$

Lösung Zunächst stellt sich die Frage, für welche Startwerte $a_1 \in \mathbb{R}$ die Folge wohldefiniert ist. Ist $a_1 = 0$, so ist a_2 wegen Division durch Null undefiniert. Ist $a_1 > 0$, so sieht man durch vollständige Induktion leicht, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder $a_n > 0$ sind. Umgekehrt, ist $a_1 < 0$, so gilt $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also die Folge für alle $a_1 \neq 0$ wohldefiniert.

Falls die Folge (a_n) konvergiert, dann muss für den Grenzwert a die Bedingung $a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$ gelten.[1] Es gilt also:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{1}{a} \\ a^2 &= 2 \\ a &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Die einzigen möglichen Grenzwerte sind demnach $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$. Ist $a_1 > 0$, so kann (a_n) nur gegen $\sqrt{2}$ konvergieren, da alle Folgenglieder positiv sind. Ist $a_1 < 0$, so kann (a_n) nur gegen $-\sqrt{2}$ konvergieren, da alle Folgenglieder negativ sind.

Betrachtet man für ein $a_1 > \sqrt{2}$ einige Werte der ersten Folgenglieder, so legt das die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton fällt. Untersuchen wir diese Vermutung näher:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\le a_n \\ \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} &\le a_n \\ \frac{1}{a_n} &\le \frac{a_n}{2} && \text{es gilt } a_n > 0 \\ 2 &\le a_n^2 && \text{es gilt } a_n > 0 \\ \sqrt{2} &\le a_n \end{aligned}$$

[1] Wenn eine Folge (a_n) gegen a konvergiert, dann muss $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$ sein. Das heißt, im Grenzübergang $n \to \infty$ ist a_{n+1} und a_n identisch. Damit muss Gleichung (1) gelten wenn a_n und a_{n+1} durch den Grenzwert a ersetzt werden.

Dass $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$ ist, sieht man wie folgt. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es wegen der Konvergenz von (a_n) ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \epsilon/2$ für alle $n > N$. Dann ist aber $|a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 2 \cdot \epsilon/2 = \epsilon$. Mit anderen Worten, $|a_{n+1} - a_n|$ wird beliebig klein, strebt also gegen 0.

Die Folge ist also monoton fallend, wenn die Folge (a_n) nach unten durch $\sqrt{2}$ beschränkt ist. Dies kann mit vollständiger Induktion gezeigt werden: Für $n = 1$ erhalten wir gerade unsere Annahme, dass $a_1 \geq \sqrt{2}$. Der Schluss $n \to n + 1$ lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq \sqrt{2} \\
\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} &\geq \sqrt{2} && \text{es gilt } a_n > 0 \\
a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2 &\geq 0 \\
(a_n - \sqrt{2})^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Letzeres gilt, da das Quadrat jeder reellen Zahl nicht-negativ ist. Damit ist gezeigt, dass (a_n) nach unten durch $\sqrt{2}$ beschränkt ist. Daraus folgt nach den obigen Überlegungen, dass (a_n) monoton fällt und somit konvergiert die Folge. Unter den möglichen Kandidaten $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ muss also $\sqrt{2}$ der Grenzwert der Folge sein.

Wählt man den Startwert a_1 der Folge aus dem Intervall $(0, \sqrt{2}]$, so ergibt sich aus der Überlegung vom vorherigen Induktionsschluss, dass $a_2 \geq \sqrt{2}$ sein muss. Tatsächlich wurde nämlich im Induktionsschluss gezeigt: aus $a_n > 0$ folgt $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzt man also $n = 1$, so erhält man $a_2 \geq \sqrt{2}$. Das heißt, dass bei $a_1 \in (0, \sqrt{2}]$ für die Folge $(a_2, a_3, a_4, \dots)$ genau jene Überlegungen von vorhin anwendbar sind. Es hat die Folge $(a_2, a_3, a_4, \dots)$ einen Startwert $a_2 \geq \sqrt{2}$, sie ist monoton fallend, nach unten durch $\sqrt{2}$ beschränkt und konvergent somit mit Grenzwert $\sqrt{2}$.

Für $a_1 < 0$ erhalten wir die um 0 symmetrische Situation wie für $a_1 > 0$. Wir können die Erkenntnisse von oben verkürzt wie folgt für $a_1 < 0$ anpassen. Durch vollständige Induktion sieht man, dass $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weiters folgt aus $a_n < 0$, dass $a_{n+1} \leq -\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq -\sqrt{2} \\
\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} &\leq -\sqrt{2} && \text{es gilt } a_n < 0 \\
a_n^2 + 2\sqrt{2}a_n + 2 &\geq 0 \\
(a_n + \sqrt{2})^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_{n+1} \leq -\sqrt{2}$. Die Folge $(a_2, a_3, \dots)$ ist also nach oben durch $-\sqrt{2}$ beschränkt. (Das stimmt selbst wenn $-\sqrt{2} < a_1 < 0$, da jedenfalls $a_2 \leq -\sqrt{2}$ ist.) Weiters ist die Folge monoton steigend:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n \\
\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} &\geq a_n \\
\frac{1}{a_n} &\geq \frac{a_n}{2} && \text{es gilt } a_n < 0 \\
2 &\leq a_n^2 && \text{es gilt } a_n < 0 \\
-\sqrt{2} &\geq a_n.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ist $(a_2, a_3, \dots)$ eine monoton steigende Folge, welche nach oben durch $-\sqrt{2}$ beschränkt ist und damit konvergiert. Unter den Kandidaten $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ für mögliche Grenzwerte kann nur $-\sqrt{2}$ der korrekte Grenzwert sein. Im Übrigen ist für $a_1 \leq -\sqrt{2}$ auch die Folge $(a_1, a_2, \dots)$ monoton steigend, nach oben durch $-\sqrt{2}$ beschränkt und konvergent mit Grenzwert $-\sqrt{2}$.