UE Mathematik I — Beispiel 39

Stefan Huber <shuber@cosy.sbg.ac.at>

28. November 2011

Aufgabenstellung

(a) Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Beweisen Sie

$$n^k < e^n$$

mit vollständiger Induktion.
Hinweis: Logarithmieren Sie!

(b) Berechnen Sie für ein festes k den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{n^k}{e^n}.$$

Lösung Zunächst stellen wir fest, dass die Aussage in (a) nur für ausreichend große n erfüllt sein kann. Setzen wir etwa $k \geq 3$, so ist zwar die Aussage für $n = 1$ noch richtig, aber für $n = 2$ nicht, da $2^3 < e^2$ eine falsche Aussage ist.

Betrachten wir die Darstellung von e^n nach Aufgabe 38, so stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}
e^n &= \lim_{i\to\infty} \left(1 + \frac{n}{i}\right)^i = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(\frac{n}{i}\right)^j \geq \lim_{i\to\infty} \binom{i}{k+1} \frac{n^{k+1}}{i^{k+1}} \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{i(i-1)(i-2)(i-k)}{(k+1)!} \frac{n^{k+1}}{i^{k+1}} = \lim_{i\to\infty} \prod_{j=0}^{k} \left(1 - \frac{j}{i}\right) \cdot \frac{n^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Für alle $n > (k+1)!$ folgt damit

$$n^k < \frac{n^{k+1}}{(k+1)!} \leq e^n.$$

Die Aufgabe (b) lässt sich leicht mit Hilfe von (a) lösen, indem man wie folgt abschätzt:

$$0 \leq a_n = \frac{n^k}{e^n} < \frac{n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Man beachte, dass es reicht, wenn $n^{k+1} < e^n$ für ausreichend große n gilt. Dies wiederum wissen wir von Aufgabe (a). Daher muss die Folge a_n gegen 0 konvergieren.